Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău

Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 11-a, Soluţii şi bareme

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2012} = 0_2.$$

Să se arate că A este inversabilă.

Soluţie. Avem

$$A + A^2 + \ldots + A^{2012} = -I_2,$$

sau

$$A\left(-A - A^2 - \ldots - A^{2011}\right) = I_2$$

....(3 p)

Deducem că A este inversabilă şi că

$$A^{-1} = -A - A^2 - \ldots - A^{2011}.$$

....(4 p)

2. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât limita

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$$

să existe, să fie finită şi nenulă.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} \\
&= \frac{-2}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)}.
\end{aligned}$$

....(4 p)

Se obţine $k = \frac{3}{2}$..(3 p)

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel încât toţi minorii de ordinul $n-1$ sunt egali între ei. Să se arate că $\det A = 0$.

Soluţie. Fie d valoarea comună a minorilor de ordin $n-1$. Atunci

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -d & d & \ldots \\ -d & d & -d & \ldots \\ d & -d & d & \ldots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Înmulţind liniile de ordin par cu -1, obţinem uşor că $\det(A^*) = 0$...................................(4 p)

Dar $AA^* = \det A \cdot I_n$, de unde $\det A = 0$..(3 p)